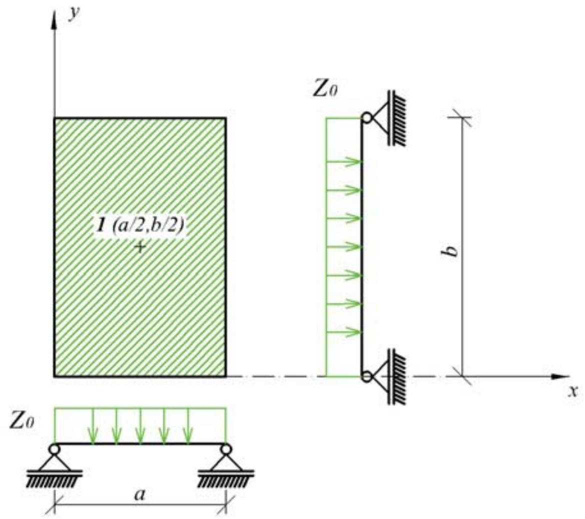
Пример 1.

За правоугаону плочу, приказану на слици, одредити:

- ***a)*** израз за угиб
- ***b)*** вредност угиба и пресечних сила у тачки 1 ако се користи само први члан реда усвојеног решења
- ***c)*** вредност угиба у тачки 1 ако се користе прва два члана реда усвојеног решења различита од нуле.



E=30 Gpa

ν *= 0.2*

dpl = 0.10 m

Z_0 *= 50 kN/m*^{2}

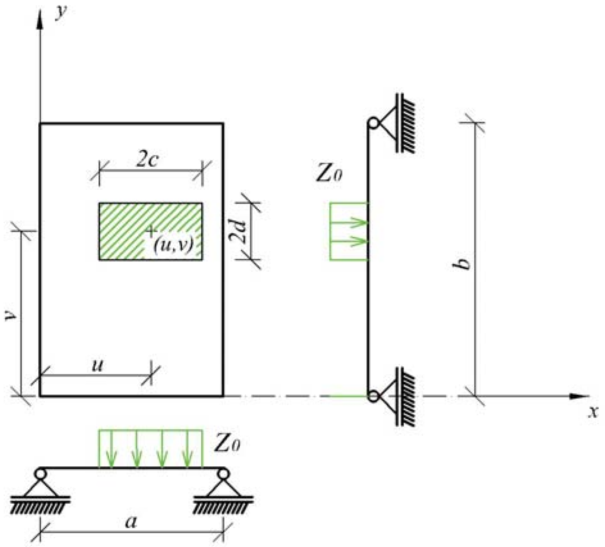
a = 4 m

b = 6 m

Решење

Пример 2.

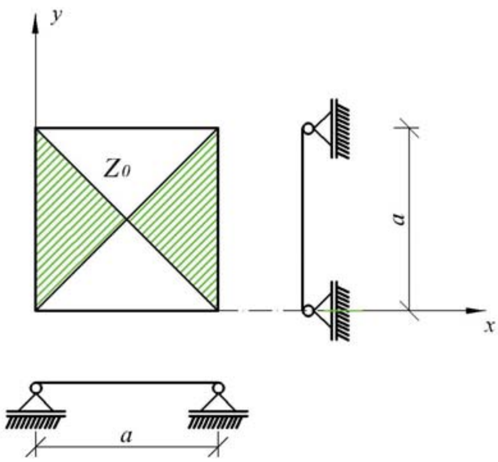
За правоугаону плочу, приказану на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе.

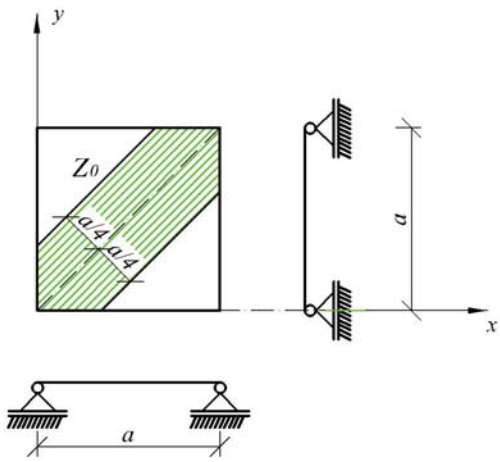


Решење

Задаци за домаћи

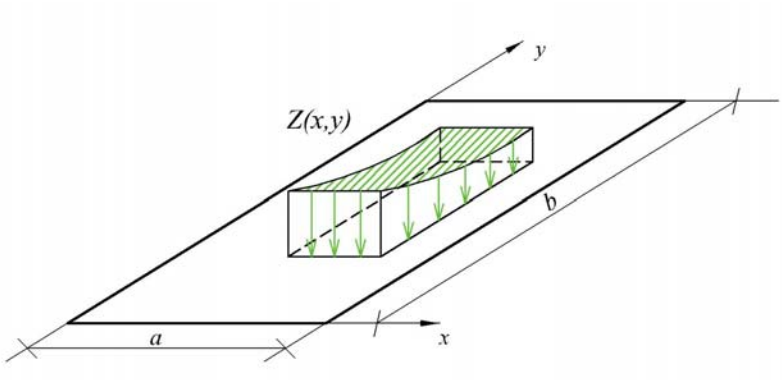
За квадратне плоче, приказане на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе.





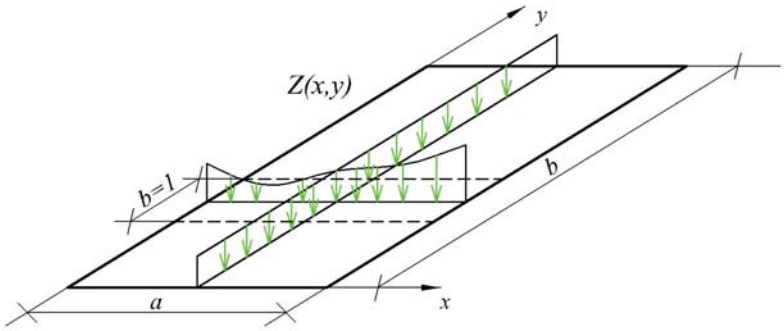
Трака

Трака је правоугаони плочаст носач код кога је један распон много већи од другог ***b>>a***.



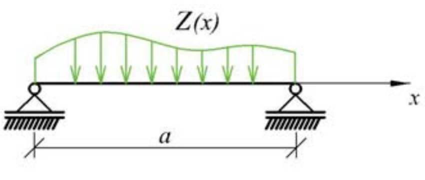
Трака у општем случају може да буде оптерећена произвољним површинским оптерећењем ***Z(x,y)***. Иако гранични услови на ивицама и не утичу на деформацију плоче (утичу само на уску зону око ослонаца) због оптерећења које је функција ***x*** и ***y*** координате и угиб ће бити функција и ***x*** и ***y*** координате.

Специјалан случај оптерећења траке: површинско оптерећење је само функција ***x*** координате ***Z= Z(x)***.



Тада ће и функција угиба зависити само од ***x: w= w(x)***. Довољно је да посматрамо траку јединичне ширине ***b=1***.

Радићемо само траку слободно ослоњену дуж контура ***x=0*** и ***x=a***.



Сви изводи по ***x*** су једнаки 0 па је *диференцијална једначина савијања*:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{Z(x)}{K}$$

Изрази за пресечне силе постају:

$$M_x = -K \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad T_x = -K \cdot \frac{d^3 w}{dx^3}; \quad M_y = -\nu \cdot M_x$$

$$M_{xy} = 0; \quad T_y = 0$$

Решење диференцијалне једначине претпостављамо у облику једноструког тригонометријског реда:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{a}$$

Ова функција угиба задовољава граничне услове за ***x=0*** и ***x=a***:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= a \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} w &= 0 \\ M_x &= 0 \end{aligned} \right.$$

$\boldsymbol{W_n}$одређујемо из услова да претпостављено решење за ***w*** мора да задовољи диференцијалну једначину савијања:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 \cdot W_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{a} = \frac{Z(x)}{K}$$

Да бисмо могли да решимо диференцијалну једначину оптерећење ***Z(x)*** морамо да апроксимирамо једноструким синусним тригометријским редом:

$$Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{a}; \quad Z_n = \frac{2}{a} \cdot \int_0^a Z(x) \cdot \sin\frac{n\pi x}{a} dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 \cdot W_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{a} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{a}$$

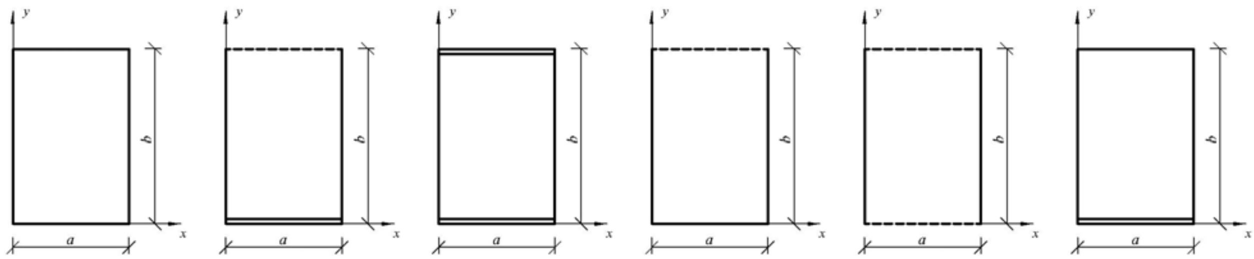
Да би диференцијална једначина била задовољена за сваки члан реда и за свако ***x***:

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 \cdot W_n = \frac{Z_n}{K} \Rightarrow W_n = \frac{Z_n \cdot a^4}{K \cdot n^4 \cdot \pi^4}$$

$$\boxed{w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n \cdot a^4}{K \cdot n^4 \cdot \pi^4} \cdot \sin\frac{n\pi x}{a}}$$

<u>Морис- Левијево решење</u>

Користи се за решавање правоугаоних плоча које су на две паралелне ивице слободно ослоњене, а на друге две могу имати произвољне услове ослањања.



Решење диференцијалне једначине савијања: $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z(x,y)}{K}$ је усвојено у

као збир: $w = w_1 + w_0$ где су:

- $\boldsymbol{w_1}$- хомогено решење
- $\boldsymbol{w_0}$- партикуларно решење диференцијалне једначине.

Хомогено решење је претпостављено у облику једноструког тигонометријског реда где је сваки члан реда производ непознате функције од ***y***, *Yn(y)*, и усвојене функције од ***x***, $\sin\frac{n\pi x}{a}$: $w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$.

За овако претпостављено решење за угиб:

$$\begin{matrix} x=0 \\ x=a \end{matrix} \begin{cases} w=0 \\ M_x=0 \end{cases}$$

x - оса се поставља управно на слободно ослоњене ивице

a - растојање слободно остављених ивица

w₁ убацујемо у диференцијалну једначину:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(Y_n^{IV}(y)-2\cdot\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\cdot Y_n^{IV}(y)+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4\cdot Y_n(y)\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}=0$$

Пошто је $\boldsymbol{w_1}$ решење хомогене диференцијалне једначине са десне стране је нула.

$Y_n^{IV}(y)-2\cdot\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\cdot Y_n^{IV}(y)+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4\cdot Y_n(y)=0$ - ***ДЈ***-на са константним коефицијентима

$r^4-2\cdot\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\cdot r^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4=0$ - карактеристична једначина

$\left[r^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^2=0$; $\quad r_{1,2}=r_{3,4}=\pm\frac{n\pi}{a}$ - корени карактеристичне једначине

$$Y_n(y)=\overline{A}_n\cdot e^{\frac{n\pi y}{a}}+\overline{B}_n\cdot e^{-\frac{n\pi y}{a}}+\overline{C}_n\cdot y\cdot e^{\frac{n\pi y}{a}}+\overline{D}_n\cdot y\cdot e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

Ако се искористи веза између експоненцијалних и хиперболичких функција, $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,:

$$Y_n(y)=\left(A_n+\frac{n\pi y}{a}\cdot B_n\right)\cdot ch\frac{n\pi y}{a}+\left(C_n+\frac{n\pi y}{a}\cdot D_n\right)\cdot sh\frac{n\pi y}{a}$$

$$w_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n+\frac{n\pi y}{a}\cdot B_n\right)\cdot ch\frac{n\pi y}{a}+\left(C_n+\frac{n\pi y}{a}\cdot D_n\right)\cdot sh\frac{n\pi y}{a}\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Партикуларно решење узимамо као решење траке, површинско оптерећење може да буде функција само од ***x***, ***Z= Z(x)***, :

$$w_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n\cdot a^4}{K\cdot n^4\cdot\pi^4}\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}$$

Овако претпостављено партикуларно решење за угиб:

$\begin{matrix} x=0 \\ x=a \end{matrix} \begin{cases} w=0 \\ M_x=0 \end{cases}$ - задовољава граничне услове за две паралелне слободно ослоњене ивице

$$\boxed{w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{Z_n\cdot a^4}{K\cdot n^4\cdot\pi^4}+\left(A_n+\frac{n\pi y}{a}\cdot B_n\right)\cdot ch\frac{n\pi y}{a}+\left(C_n+\frac{n\pi y}{a}\cdot D_n\right)\cdot sh\frac{n\pi y}{a}\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}}$$

Из граничних услова за ***y=0*** и ***y=b*** одређују се непознате константе $\boldsymbol{A_n}$, $\boldsymbol{B_n}$, $\boldsymbol{C_n}$ и $\boldsymbol{D_n}$.